21/10/19

Μετασχηματισμός Fourier

- Ορίζουμε τη συν/ση $F(k) = \hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx}\,dx$$

ως τον μετασχηματισμό Fourier της $f(x)$
(Fourier transform)

Ο FT υπάρχει αν : (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$

(b) $f(x)$ πεπερασμένο το πλήθος ασυνέχειες

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_{-a}^{b} f(x)dx = PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

(πρωτεύουσα τιμή)

Σύνδεση με Μετασχηματισμό Laplace

- Ο L.T. είναι η συν/ση
$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(x)\cdot e^{-sx}\,dx \quad , \quad s>0 \ , \ s\in\mathbb{R}$$

Για κατάλληλες συν/σεις που ορίζονται κ' οι δύο μετασχηματισμοί γράφουμε :
$$F^+(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$F^-(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

κ' τότε $F(k) = F^+(-is) + F^-(is)$

<u>ΑΠΟΔ.</u> : $\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$

Μετασχηματισμοί ημιτόνου κ. συνημιτόνου

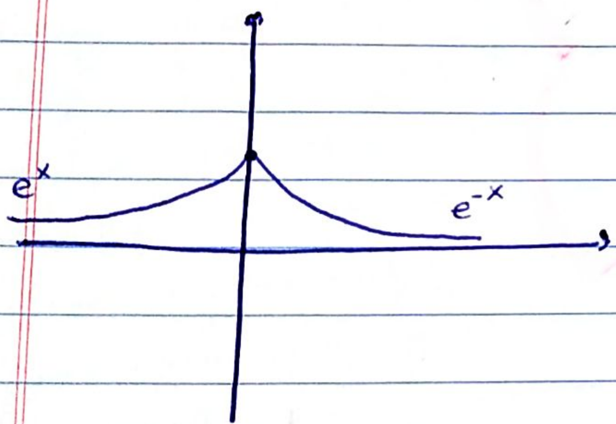
Κατά τον ίδιο τρόπο οι συναρτήσεις που ορίζονται από τα ολοκληρώματα $F_s(k) = \int_0^\infty \sin(kx) f(x) dx$ κ.

$$F_c(k) = \int_0^\infty \cos(kx) f(x) dx$$

ορίζονται ως ο μετασχηματισμός ημιτόνου κ. συνημιτόνου αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔ.: Να βρεθεί ο FT της $f(x) = e^{-a|x|}$, $Re\{a\} > 0$, $a \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ:



$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{ikx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{ikx} dx + \int_0^\infty e^{-ax} e^{ikx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a+ik)x} dx + \int_0^\infty e^{(-a+ik)x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{a+ik} \cdot e^{(a+ik)x} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-a+ik} \cdot e^{(-a+ik)x} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{a+ik} - \frac{1}{-a+ik} = \frac{-2a}{-(a^2+k^2)} = \frac{2a}{|a|^2+k^2}$$

ΠΑΡΑΔ.: Να βρεθεί ο FT της $f(x) = e^{-ax^2}$, $Re\{a\}>0$

ΛΥΣΗ:

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{ikx}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+ikx}\, dx$$

$$ax^2 + ik \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} ik\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a}} ik\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{a}\, x - \frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{k^2}{4a}$$

άρα $$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\, x - \frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2} e^{-k^2/4a}\, dx$$

$$= e^{-k^2/4a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\, x - \frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx$$

Θέτω $y = \sqrt{a}\, x - \frac{ik}{2\sqrt{a}}$

$$dy = \sqrt{a}\, dx$$

άρα $$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-k^2/4a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

Πώς το λύνω αυτό ?

$\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = I$$

Απει IV !?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = I^2 \qquad =$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy = I^2$$

Αλλάζω σε πολικές, άρα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-ar^2}\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-ar^2}\,dr = \frac{\pi}{a}$$

άρα $\boxed{I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$

<u>Συνεπώς</u>: $\hat{f}(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \cdot e^{-k^2/4a}$ ∎

<u>Ιδιότητες</u>:

1. Μετασχηματισμός της παραγώγου

$$F\{\underbrace{\tfrac{df}{dx}}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx} \cdot e^{ikx}\,dx = fe^{ikx} - \int_{-\infty}^{+\infty} ikfe^{ikx}\,dx$$

παράγωγο, άρα έχω ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ εξ/σ.

$$= -ik \int_{-\infty}^{+\infty} fe^{ikx}\,dx = -ik\hat{f}(k)$$

$$\boxed{F\left\{\frac{d^n f}{dx^n}\right\} = (-ik)^n \hat{f}(k)}$$

2. Μετατόπιση

$$F\{f(x-x_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x-x_0)}_{y} e^{ikx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{ik(y+x_0)}\,dy$$

Άρα αν ξέρω τι γίνεται στο 0, ξέρω τι γίνεται παντού. $y = x - x_0$, $dy = dx$

$$= e^{ikx_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iky}$$

$$= e^{ikx_0} \hat{f}(k)$$

3. Συνέλιξη

Θεωρώ τη συν/ση $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) dy$

$$F\{g(x)\} = \hat{g}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) dy \, e^{ikx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) e^{ikx} dy\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) e^{ikx} dx}_{\text{Μετατόπιση } e^{iky}\hat{k}(k)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iky} \hat{k}(k) dy \quad = \hat{k} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{iky} dy$$

$$= \hat{k} \cdot \hat{f}$$

4. Ταυτότητα του Parseval

Για τη μιγαδική συν/ση $g(x)$ με συζυγή $g^*(x)$: (όπου i βάζω το $-i$)

$$F\{g^*(k)\} = \hat{g}^*(-k)$$

<u>ΑΠΟΔ.</u>

$$F\{g^*(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x) e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x) (e^{-ikx})^* dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x) e^{-ikx})^* dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ikx} dx\right)^* = \hat{g}^*(-k)$$

Σε συνδυασμό με το θεώρημα της συνέλιξης

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) \cdot G^*(k) dk$$

Ενα ολοκληρ. σ' έναν χώρο είναι το ίδιο σε έναν άλλο. π.χ. στο προηγ. παράδ.: εκθετ. → ρητούς

5. Το λήμμα Riemann - Lebesgue

Αν μία $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ κ' $F(k) = \hat{f}(k)$ ο F.T. τότε: $\lim_{|k| \to \infty} F(k) = 0$

ΑΠΟΔ.

Γνωρίζω ότι $F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx$ κ' θέτω $x = y + \frac{\pi}{k}$

Αντικαθιστώ:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{ik\left(y + \frac{\pi}{k}\right)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{iky} e^{i\pi} dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{iky} dy$$

άρα $$F(k) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y + \frac{\pi}{k}\right) e^{ikx} dx\right)$$

Χρειάζομαι ομοιόμ. σύγκλιση κ' εδώ εξασφαλίζεται από την απόλυτη σύγκλιση

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{k}\right)\right] e^{ikx} dx$$

$$|F(k)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) \right| dx$$

$$\Rightarrow \lim_{|k| \to \infty} |F(k)| \leq 0 \quad \Rightarrow \lim_{|k| \to \infty} F(k) = 0$$

Γιατί $x = y + \frac{\pi}{k}$?

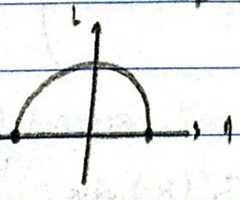
$\Rightarrow ikx = iky + \pi$

(κάνει κύκλο)

$\downarrow$

$e^{ikx} = e^{iky + \pi}$

κ' $e^{ix} = \cos x + i \sin x$



Άρα σε έναν μετασχ. Fourier για να είμαι σίγουρη "κοιτάω" το όριο στο ∞ αν κάνει 0

6. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός

- Η συνάρτηση δέλτα ή Dirac

Ορίζουμε μία γενικευμένη συνάρτηση $\delta(x-x_0)$ η οποία είναι παντού 0 εκτός από το x_0 όπου απειρίζεται : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$

Βάσει αυτής ορίζουμε το ζεύγος Fourier, δηλ. ευθύ κ. αντίστροφο ως εξής:

$$\hat{f}(k) = F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{\pm ikx}\, dx$$ ευθύς

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e^{\mp ikx}\, dk$$ αντίστροφος